



应用随机过程

张波 商豪 邓军

中国人民大学 统计学院

1/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



第10章 随机过程在保险精算中的应用

- § 10.1 基本概念
- § 10.2 经典破产理论介绍

2/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§10.1 基本概念

本节首先引入保险精算中的一些基本概念。

定义 10.1.1 复利计算期与基本的时间单位不一致产生了利率的名不副实。将原来规定的结算多次的利率称为名义利率，以 $i^{(m)}$ 表示， m 表示结算次数， i 表示实际年利率，则有名义利率与实际利率之间的关系式：

$$1 + i = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^m$$

3/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



4/100

定义 10.1.2 若将应在未来某时期支付的金额提前到现在支付，则支付额中应扣除的部分金额称为贴现额，单位货币在单位时间内的贴现额称为贴现率。贴现与利息的区别在于出发点不一样，利息是在本金基础上的增加额，贴现则是在累积额基础上的减少额。

同名义利率的定义类似，将原来规定的结算多次的贴现率称为名义贴现率，以 $d^{(m)}$ 表示， m 表示结算次数， d 表示实际贴现率，则有名义贴现率与实际贴现率之间的关系式：

$$1 - d = \left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^m$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



定义 10.1.3 对名义利率来说，当结算次数 m 趋近于无穷大时，可以确切地表示某个时点上的利率水平，称之为利息力，定义为：

$$\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} u^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - (1+i)^0}{1/m}$$

即为函数 $(1+i)^t$ 在 $t=0$ 处的导数，即

$$\delta = \ln(1+i)$$

5/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit

§10.2 经典破产理论介绍

破产论的研究起源于瑞典精算师Lundberg在1903年发表的博士论文，但他的工作不符合现代数学的严格标准，以Cramer 为首的瑞典学派将Lundberg的工作奠定在坚实的数学基础之上，同时发展了严格的随机过程理论。本节将介绍Lundberg-Cramer 经典破产模型（简称L-C模型）。



6/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



10.2.1 破产问题的描述

首先我们假设索赔额模型为复合Poisson过程，具体定义如下。

定义 10.2.1 Lundberg-Cramer经典破产模型：
设保险公司在时刻 t 的盈余(surplus)可表示为

$$U(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t \geq 0 \quad (10.2.1)$$

其中 u 是初始资本, c 是保险公司单位时间征收的保险费率, $X_k, k = 1, 2, \dots$ 表示第 k 次索赔额, $N(t)$ 表示到时刻 t 发生的索赔次数, 即 $\sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ 表示到时刻 t 为止的累积索赔金额。



$\{X_k, k \geq 1\}$ 是恒正的独立同分布随机变量序列, 记 $F(x) = P(X_1 \leq x), \forall x \geq 0, \mu = EX_1 = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx;$

$\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的 Poisson 过程, 且与 $\{X_k, k \geq 1\}$ 相互独立.

由模型的独立性假定有

$$E[S(t)] = E[N(t)]E[X_1] = \lambda t \mu$$

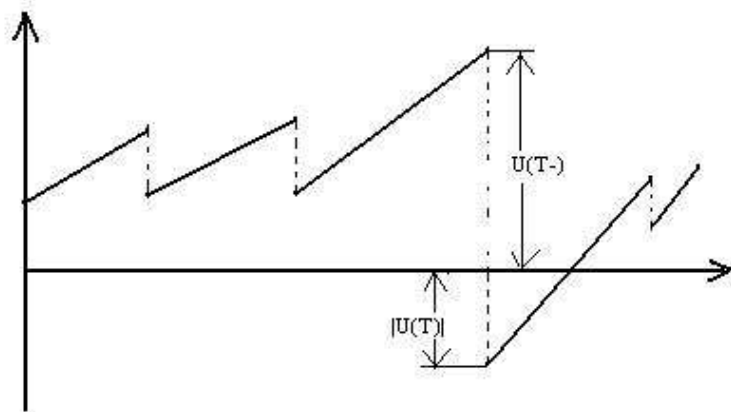
保险公司为运作上的安全, 要求

$$ct - E[S(t)] = (c - \lambda \mu)t > 0, \quad t \geq 0.$$

令

$$c = (1 + \theta)\lambda \mu \quad (10.2.2)$$

其中 $\theta > 0$, 称为相对安全负载(relative security loading). 盈余过程的一条样本路径:



由泊松过程具有平稳独立增量以及L-C模型的独立性假定知 $\{ct - S(t), t \geq 0\}$ 为平稳独立增量过程. 于是由强大数定律得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = +\infty, \quad a.s.$$

但这并不能排除在某一瞬时, 盈余过程可能取负值, 这时称保险公司“破产”, 称

$$T = \inf\{t : U(t) < 0\}, \quad \inf \phi = +\infty \quad (10.2.3)$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



为破产时刻. 所以 Lundberg-Cramèr研究的是保险公司最终破产的概率

$$\Psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u), \quad u \geq 0 \quad (10.2.4)$$

简称为破产概率.破产概率可以作为评价保险公司偿付能力的一个重要数量指标。记

$$R(u) = 1 - \Psi(u) = P\{U(t) \geq 0 | U(0) = u\} \quad (10.2.5)$$

则它表示初始盈余为 u 时保险公司永不破产的概率，也称为生存概率。

以下我们的工作就是分析破产概率 $\Psi(u)$ 和生存概率 $R(u)$ 。

10/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



10.2.2 调节系数与Lundberg不等式

我们引入调节系数的概念，并利用调节系数得到破产概率的一个上界。

定义 10.2.2 假设单次索赔额的矩母函数

$$\phi_X(r) = E(e^{rX}) = \int_0^\infty e^{rx} dF(x) = 1 + r \int_0^\infty e^{rx} [1 - F(x)] dx \quad (10.2.6)$$

至少在包含原点的某个邻域内存在。其次，要求方程

$$\phi_X(r) = 1 + \frac{c}{\lambda} r = 1 + (1 + \theta) \mu r \quad (10.2.7)$$

存在正解，记为 R ，称为调节系数。



注 1: 由于 $\phi_X(r)$ 在其收敛域内是严格增加的凸函数, 故上方程若有正解, 则必是惟一的, 记为 R , 并称之为调节系数, 满足

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{Rx} [1 - F(x)] dx = 1 \quad (10.2.8)$$

注意到

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx = \frac{\lambda}{c} \mu = \frac{1}{1 + \theta} < 1$$

可知非负函数 $\frac{\lambda}{c}[1 - F(x)], x \geq 0$ 不是一个概率密度函数. 但若令

$$f(x) = e^{Rx} \frac{\lambda}{c} [1 - F(x)]$$

则可证 $f(x)$ 是一个概率密度函数, 这解释了调节系数 R 名称的由来。



注2: 记 $V(t) = ct - S(t)$ 。由于 $\{V(t), t \geq 0\}$ 为平稳独立增量过程, 故有

$$\phi_{V(t)}(r) = E[e^{rV(t)}] = (\phi_{V(1)})^t, \quad \forall t \geq 0$$

又因为

$$\begin{aligned}\phi_{V(1)}(r) &= E[e^{r(c-S(1))}] = e^{cr} E[e^{-rS(1)}] \\ &= e^{cr} \exp\{\lambda(\phi_X(-r) - 1)\} \\ &= \exp\{\lambda\phi_X(-r) - \lambda + cr\}\end{aligned}$$

以及调节系数的定义可知

$$\phi_{V(1)}(-R) = 1$$

从而也有

$$\phi_{V(t)}(-R) = 1, \quad \forall t \geq 0$$



总之，若调节系数存在，则它是方程 $\phi_X(r) = 1 + \frac{c}{\lambda}r$ 和下述两个方程的惟一正根：

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{rx} [1 - F(x)] dx = 1$$

$$\phi_{V(1)}(-r) = 1.$$

注3：式子(??)不一定有正根，比如单次索赔额分布有可能不存在矩母函数。



例 10.2.1 设单次索赔额 X 服从指数分布, 且 X 的均值为 μ , 试求调节系数。

解: 由题意知, 单次索赔额 X 的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x\mu}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

X 的矩母函数为:

$$\phi_X(r) = \int_0^{+\infty} e^{rx} dF(x) = (1 - \mu r)^{-1}, \quad r < \frac{1}{\mu}$$

由调节系数的定义知: $1 + (1 + \theta)\mu r = (1 - \mu r)^{-1}$

故可得调节系数为 $R = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)}$



例 10.2.2 假设单次索赔额 X 服从 Γ 分布，形状参数为2，尺度参数为 β ，设相对安全负载为 $\theta = 2$ ，试求调节系数。

解：单次索赔额 X 的密度函数为：

$$f(x) = \beta^{-2} x e^{-x/\beta}, \quad x > 0$$

此 Γ 分布的期望值为 $\mu = 2\beta$ ，且 X 的矩母函数为：

$$\phi_X(r) = \int_0^{+\infty} e^{rx} f(x) dx = (1 - \beta r)^{-2}, \quad r < \frac{1}{\beta}$$

由调节系数的定义知 $1 + 6r\beta = (1 - \beta r)^{-2}$ ，整理即得 $6\beta^3 r^3 - 11\beta^2 r^2 + 4\beta r = 0$ ，

也即

$$r\beta(2r\beta - 1)(3r\beta - 4) = 0$$

故可得调节系数为 $R = \frac{1}{2\beta}$



定理 10.2.1 Lundberg不等式：若 $R > 0$ 为调节系数，则破产概率 $\Psi(u)$ 满足如下不等式：

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad \forall u \geq 0 \quad (10.2.9)$$

证明一：设 $\Psi_n(u)$ 表示破产发生在第 n 次索赔及之前的概率， $n = 0, 1, 2, \dots$ 。采用数学归纳法证明 $\Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ 。

$\Psi_0(u) \leq e^{-Ru}$ ，假设 $\Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ ，往证 $\Psi_{n+1}(u) \leq e^{-Ru}$ 。

我们首先考虑第一次索赔发生时的情况，假设到第一次索赔发生的时间间隔服从指数分布，概率密度函数为 $\lambda e^{-\lambda t}$ 。若第一次索赔发生的时刻为 $t > 0$ ，在时刻 t 可用于支付索赔的金额为 $u + ct$ ；当第一次索赔额超过 $u + ct$ 时，破产发生，且破产概率为 $P\{x > u + ct\} = 1 - F(u + ct)$ 。



当索赔额不超过 $u + ct$ 时，破产不再第一次索赔时发生，支付索赔额后，盈余为 $u + ct - x$ 。但破产仍有可能在接下来的索赔时发生。

因为盈余过程具有平稳独立增量，由全概率公式，有如下递归方程：

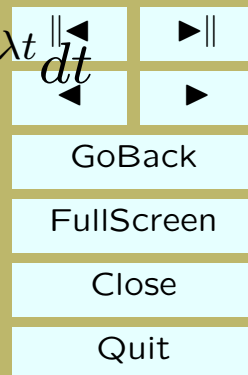
$$\Psi_{n+1}(u) = \int_0^{+\infty} \left[1 - F(u + ct) + \int_0^{u+ct} \Psi_n(u + ct - x) dF(x) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt$$

18/100

故由归纳假设

$$\begin{aligned} & \Psi_{n+1}(u) \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_{u+ct}^{+\infty} dF(x) + \int_0^{u+ct} \Psi_n(u + ct - x) dF(x) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left[\int_{u+ct}^{+\infty} e^{-R(u+ct-x)} dF(x) + \int_0^{u+ct} e^{-R(u+ct-x)} dF(x) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \end{aligned}$$

其中，当 $x > u + ct$ 时， $-R(u + ct - x) > 0$ ，





即有 $e^{-R(u+ct-x)} > 1$ 。

由积分区域的可加性，得到

$$\begin{aligned}\Psi_{n+1}(u) &\leq \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-R(u+ct-x)} dF(x) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda e^{-Ru} \int_0^{+\infty} e^{-Rct} \left[\int_0^{+\infty} e^{Rx} dF(x) \right] e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda e^{-Ru} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+Rc)t} \phi_X(R) dt \\ &= \lambda \phi_X(R) e^{-Ru} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+Rc)t} dt \\ &= \frac{\lambda \phi_X(R)}{\lambda + Rc} e^{-Ru}\end{aligned}$$

而由调节系数的概念知

$$\phi_X(R) = 1 + \theta R \mu = 1 + \frac{c}{\lambda} R$$



故有

$$\frac{\lambda \phi_X(R)}{\lambda + Rc} e^{-Ru} = \frac{\lambda[1 + (1 + \theta)R\mu]}{\lambda + Rc} e^{-Ru} = \frac{\lambda + Rc}{\lambda + Rc} e^{-Ru} = e^{-Ru}$$

即有 $\Psi_{n+1}(u) \leq e^{-Ru}$, 故 $\Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$ 对任意 n 均成立。故有

$$\Psi(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(u) \leq e^{-Ru}$$

20/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



证明二： 令

$$X_t = e^{-RU(t)} = X_0 e^{-RV_t}$$

其中 $X_0 = e^{-Ru}$, R 为调节系数, $V_t = ct - S(t)$ 。若令

$$Y_t = -RV_t, \quad t \geq 0$$

则 $\{Y_t, t \geq 0\}$ 为零初值, 且具有平稳独立增量的随机过程.

$$E[e^{Y_1}] = E[e^{-RV_1}] = M_{V_1}(-R) = 1$$

于是从例6.5.1可知 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是一个非负鞅. 利用非负鞅的收敛定理, 得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty < \infty, \quad a.s.$$

现令 T 为破产时刻, 由于对任意固定的 t , $T \wedge t$ 是有界停时, 再利用停时定理即知

$$E[X_{T \wedge t}] = E[X_0] = e^{-Ru}$$



于是有

$$\begin{aligned} & e^{-Ru} \\ &= E[X_{T \wedge t} | T \leq t] P\{T \leq t\} + E[X_{T \wedge t} | T > t] P\{T > t\} \\ &= E[X_T | T \leq t] P\{T \leq t\} + E[X_t | T > t] P\{T > t\} \quad (2.10) \end{aligned}$$

注意到当 $t < T$ 时, $U(t) \geq 0$, 所以

$$X_t = e^{RU(t)} \leq 1$$

因此, 由单调收敛定理与Lebesgue控制收敛定理, 在(??)式两端令 $t \rightarrow \infty$ 取极限得

$$e^{-Ru} = E[X_t | T < \infty] P\{T < \infty\} + E\{X_\infty | T = \infty\} P\{T = \infty\}$$

又因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = +\infty, a.s.$, 故有 $X_\infty = 0, a.s.$ 从而

有

$$e^{-Ru} = E[X_T | T < \infty] P\{T < \infty\}$$

由此得到

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(t)} | T < \infty]}$$

再注意到 $U(T) < 0, e^{-RU(T)} > 1$, 由上式即知

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}$$

从而Lundberg不等式得证. ■



23/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



Lundberg不等式的重要性在于，一方面，它能用来检验初始盈余 u 的水平与相对安全负载 θ 之间的关系，这两个参数均能由保险公司控制。

假设保险公司能提供的初始盈余为 u ，能容忍的破产概率为 α ，则相对安全负载

$$\theta = \frac{u \{ E[\exp(-\frac{\ln \alpha}{u} X) - 1] \}}{-\mu \ln \alpha} - 1$$

能使得 $1 + (1 + \theta)\mu R = \phi_X(R)$ ，当 $R = -\frac{\ln \alpha}{u}$ 时，再由Lundberg不等式可得

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}$$

另一方面，若希望得到一个指定的相对安全负载 θ ，可取 $u = -\frac{\ln \alpha}{R}$ ，则可保证 $\Psi(u) \leq e^{-Ru} = e^{\ln \alpha} = \alpha$ 。



进一步，由Lundberg不等式还可得

$$\Psi(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) = 0 \quad (10.2.11)$$

事实上，破产概率必须是非负的，故有 $0 \leq \Psi(u) \leq e^{-Ru}$ ，由两边夹法则可得

$$0 \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) \lim_{u \rightarrow \infty} e^{-Ru} = 0$$

此外，可得生存概率为

$$R(\infty) = 1 - \Phi(\infty) = 1 \quad (10.2.12)$$



10.2.3 破产概率满足的方程

本小节我们寻求破产概率和生存概率的显示表达式。

定义 10.2.3 定义函数 $G(u, y)$, $u \geq 0, y \geq 0$,

$$G(u, y) = P\{U(T) \geq -y, T < \infty | U(0) = u\}$$

即表示当初始盈余为 u , 破产时赤字最大为 y 的概率。

由定义知, 破产后的盈余在 0 和 $-y$ 之间, 故有

$$\Phi(u) = \lim_{y \rightarrow \infty} G(u, y), \quad u \geq 0 \quad (10.2.13)$$

有如下结果:



定理 10.2.2 函数 $G(u, y)$ 满足如下方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G(u, y)}{\partial u} \\ &= \frac{\lambda}{c} G(u, y) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u G(u - x, y) dF(x) \\ & \quad - \frac{\lambda}{c} [F(u + y) - F(u)], \quad u \geq 0 \quad (10.2.14) \end{aligned}$$

证: 我们考虑第一次索赔发生时的情况。假设至第一次索赔发生的时间间隔服从指数分布, 且概率密度函数为 $\lambda e^{-\lambda t}$ 。保险公司在第一次索赔发生的时刻 t 的盈余为 $u + ct$ 。当索赔额 x 满足 $0 \leq x \leq u + ct$ 时, 第一次索赔不会导致破产, 且索赔后的盈余为 $u + ct - x$ 。

由平稳独立增量性知, 破产赤字最大为 y 的破产概率为 $G(u + ct - x, y)$ 。当 $u + ct \leq x \leq u + ct - y$ 时, 第一次索赔导致破产, 且破产赤字最大为 y 。第一次索赔额



在 $[u+ct, u+ct+y]$ 中取值的概率是 $F(u+ct+y) - F(u+ct)$ 。

由全概率公式有

$$G(u, y) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{u+ct} G(u+ct-x, y) dF(x) + F(u+ct+y) - F(u+ct) \right] \lambda e^{-\lambda t} dt$$

做线性变换, 令 $z = u + ct$, 即 $t = \frac{z-u}{c}$, $dt = \frac{dz}{c}$, 有

$$G(u, y) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^{+\infty} e^{-\frac{\lambda z}{c}} \left[\int_0^z G(z-x, y) dF(x) + F(z+y) - F(z) \right] dz$$

28/100

故可得 $G(u, y)$ 关于 u 的偏导数。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G(u, y)}{\partial u} \\ &= \frac{\lambda}{c} G(u, y) + \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \left\{ -e^{-\frac{\lambda u}{c}} \left[\int_0^u G(u-x, y) dF(x) + F(u+y) - F(u) \right] \right\} \end{aligned}$$

即得到式(10.2.14)。

||◀ ▶||

◀ ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



下述定理得到 $G(0, y)$ 的显式表达式。

定理 10.2.3 函数 $G(0, y)$ 可表达为:

$$G(0, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^y [1 - F(x)] dx, \quad y \geq 0 \quad (10.2.15)$$

证: 首先有 $0 \leq G(u, y) \leq \Phi(u) \leq e^{-Ru}$, 故

$$0 \leq G(\infty, y) = \lim_{u \rightarrow \infty} G(u, y) \leq \lim_{u \rightarrow \infty} e^{-Ru}$$

即有 $G(\infty, y) = 0$, 且

$$\int_0^{+\infty} G(u, y) du \leq \int_0^{+\infty} e^{-Ru} du = \frac{1}{R} < \infty$$

令 $\tau(y) = \int_0^{+\infty} G(u, y) du$, 则有 $0 < \tau < \infty$.

将式 (10.2.14) 从0到 $+\infty$ 关于 u 取积分得

$$\begin{aligned} & -G(0, y) \\ &= \frac{\lambda}{c} \tau(y) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} \int_0^u G(u-x, y) du dF(x) + \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} [F(u+y) - F(u)] du \end{aligned}$$



做积分变换, 令 $v = u - x$, 可得

$$\begin{aligned} G(0, y) &= -\frac{\lambda}{c}\tau(y) + \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} G(v, y) dv dF(x) + \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} [F(u+y) - F(u)] du \\ &= -\frac{\lambda}{c}\tau(y) + \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} \tau(y) dF(x) + \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} [F(u+y) - F(u)] du \end{aligned}$$

因为 $\int_0^{+\infty} dF(x) = 1$, 故上式右端的前两项互相抵消, 即有

$$G(0, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^y [1 - F(x)] dx$$

30/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



定理 10.2.4 在初始盈余为0时，破产概率为：

$$\Phi(0) = \frac{1}{1 + \theta} \quad (10.2.16)$$

证：设单次索赔额的分布函数为 $F(x)$ ，均值为 μ 。对于取值非负的随机变量，易知其期望为：

$$\mu = \int_0^{+\infty} [1 - F(x)] dx$$

由定理10.2.3有

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \lim_{y \rightarrow \infty} G(0, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{c} \int_0^y [1 - F(x)] dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} [1 - F(x)] dx = \frac{\lambda \mu}{c} = \frac{1}{1 + \theta} \end{aligned}$$

同时可得初始盈余为0时，生存概率 $R(0) = \frac{\theta}{1 + \theta}$



接下来给出一个生存概率满足的积分微分方程。

定理 10.2.5 生存概率 $R(u)$ 满足如下方程：

$$R'(u) = \frac{\lambda}{c}R(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u R(u-x)dF(x), \quad u \geq 0 \quad (10.2.17)$$

证：由式 (10.2.13) 和式 (10.2.14) 有

$$\Phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Phi(u-x)dF(x) - \frac{\lambda}{c}[1 - F(u)] \quad (10.2.18)$$

$R(u) = 1 - \Phi(u)$ ，故有

$$\begin{aligned}
& -R'(u) \\
&= \frac{\lambda}{c}[1 - R(u)] - \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - R(u - x)]dF(x) - \int_0^u [1 - F(u)] \\
&= -\frac{\lambda}{c}R(u) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u R(u - x)dF(x)
\end{aligned}$$

其中 $F(u) = \int_0^u dF(x)$



33/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



例 10.2.3 若单次索赔额服从指数分布，即

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}, \quad x \geq 0$$

求生存函数 $R(u)$ 。

解：根据定理10.2.5有

$$R'(u) = \frac{\lambda}{c}R(y) - \frac{\lambda}{\mu c} \int_0^u R(u-x)e^{-\frac{x}{\mu}} dx$$

令 $y = u - x$ 有

$$R'(u) = \frac{\lambda}{c}R(y) - \frac{\lambda}{\mu c} \int_0^u R(y)e^{-\frac{u-y}{\mu}} dy$$

$$R''(u) = -\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}R'(u)$$

即有

$$e^{\frac{\theta y}{u(1+\theta)}} R'(u) = H_1$$
$$H_1 = R'(0) = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)^2}$$

故可得

$$R(u) = -\frac{1}{1+\theta} \exp\left\{-\frac{\theta u}{\mu(1+\theta)^2}\right\} + H_2$$

当 $u = 0$ 时, 由 $R(0) = -\frac{\theta}{1+\theta}$ 得 $H_2 = 1$, 故有

$$R(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta} \exp\left\{-\frac{\theta u}{\mu(1+\theta)^2}\right\}$$



35/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



10.2.4 Cramer近似破产公式

Feller引入的更新论证技巧已经成为研究经典破产论的主要数学工具。以下基于Feller更新理论得到破产概率的一个近似表达式。

定理 10.2.6 在Lundberg-Cramer经典破产模型中，我们有

$$(1) \Psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

(2) Lundberg-Cramèr近似：存在正常数 C ，使得

$$\Psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \quad u \rightarrow \infty$$

即

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Psi(u)}{Ce^{-Ru}} = 1.$$



证明： 记

$$R(u) = 1 - \Psi(u) = P(U(t) \geq 0 | U(0) = u),$$

则它表示初始盈余为 u 时，保险公司永不破产的概率，也称为生存概率. 首先，根据首次索赔发生的时刻 T_1 和首次索赔额 X_1 的大小，对生存概率应用全概率公式，得

$$R(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_0^{u+ct} R(u+ct-z) dF(z) \right) dt$$

做变换 $x = u + ct$, 得

$$R(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda}{c}u} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda}{c}x} \left(\int_0^x R(x-z) dF(z) \right) dx$$

由此可见 $R(u)$ 是可微函数. 将上式两端对 u 求导, 得

$$R'(u) = \frac{\lambda}{c} R(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u R(u-z) dF(z)$$



在上式两端取积分，得

$$R(t) - R(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^t R(u) du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u R(u-z) d[1-F(z)] du$$

由分部积分公式得到

$$\int_0^u R(u-z) d[1-F(z)] = R(0)[1-F(u)] - R(u) + \int_0^u R'(u-z)[1-F(z)] dz$$

并代入上式，即得

$$R(t) - R(0) = \frac{\lambda}{c} R(0) \int_0^t [1-F(u)] du + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u R'(u-z)[1-F(z)] dz du$$

若在上式中的二重积分中交换积分次序，可得

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^u R'(u-z)[1-F(z)] dz du &= \int_0^t \left(\int_z^t R'(u-z)[1-F(z)] du \right) dz \\ &= \int_0^t [R(t-z) - R(0)][1-F(z)] dz \end{aligned}$$

再将上式代入上式，得到

$$R(t) = R(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^t R(t-z)[1-F(z)] dz$$



由于 $\lim_{u \rightarrow \infty} R(u) = 1$, 令 $t \rightarrow \infty$ 得

$$1 = R(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} [1 - F(z)] dz = R(0) + \frac{\lambda}{c} \mu$$

于是有

$$\Psi(0) = 1 - R(0) = \frac{\lambda}{c} \mu = \frac{1}{1 + \theta}$$

(1)得证。

将上式代入其前式, 得

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} [1 - F(z)] dz + \frac{\lambda}{c} \int_0^t R(t-z) [1 - F(z)] dz \\ &= 1 - \frac{\lambda}{c} \int_t^{\infty} [1 - F(z)] dz - \frac{\lambda}{c} \int_0^t [1 - R(t-z)] [1 - F(z)] dz \end{aligned}$$

从而得

$$\Psi(t) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} [1 - F(z)] dz + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \Psi(t-z) [1 - F(z)] dz$$



由于

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} [1 - F(z)] dz = \frac{\lambda}{c} \mu = \frac{1}{1 + \theta} < 1$$

所以上式是更新方程.

在上述更新方程两端同乘以 e^{Rt} (R 为调节系数), 并令

$$A(t) = e^{Rt} \Psi(t), \quad a(t) = \frac{\lambda}{c} e^{Rt} \int_t^{\infty} [1 - F(z)] dz$$

$$f(z) = \frac{\lambda}{c} e^{Rz} [1 - F(z)]$$

即得

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t - z) f(z) dz$$

又知 $\int_0^{\infty} f(z) dz = 1$, 从而上方程是适定更新方程. 易

见 $a(t)$ 为单调递减函数, 并且

$$\int_0^{\infty} a(t) dt = \frac{1}{R} \frac{\theta}{1 + \theta} = C_1.$$



于是 $a(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上满足更新定理中的条件. 因此由关键更新定理得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Rt} \Psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{C_1}{\int_0^\infty z f(z) dz} = C$$

这表明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Psi(t)}{C e^{-Rt}} = 1$$

从而L-C模型近似式(2)式得证. ■

41/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



例 10.2.4 设单次索赔额服从指数分布，且分布函数为：

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

求近似破产概率公式。

解：调节系数为 $R = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)}$ ；
矩母函数为 $\phi_X(r) = \frac{1}{1-\mu r}$ ，故

$$\phi'_X(r) = \frac{d(\frac{1}{1-\mu r})}{dr} = \frac{\mu}{(1-\mu r)^2}$$

$$\phi'_X(R) = \frac{\mu}{(1-\mu R)^2} = \mu(1+\theta)^2$$

由Cramer近似破产公式有

$$C = \frac{\mu\theta}{\mu(1+\theta)^2 - \mu(1+\theta)} = \frac{1}{1+\theta}$$

即有

$$\Psi(u) \sim \frac{1}{1+\theta} \exp\left\{-\frac{\theta y}{\mu(1+\theta)}\right\}, \quad u \rightarrow +\infty$$

本节我们介绍的是经典的Lundberg-Cramer破产模型，许多学者对此进行改进，将保险公司的盈余过程用扩散过程或跳扩散过程来描述。



43/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit